Danmarks Statistik
MODELGRUPPEN
Jes Asger Olsen

Arbejdspapir*

2. januar 2019

En input-output model med mængder opgjort som Laspeyres kædeindeks

Resumé:

I dette papir opstilles en input-output model med fastprisvariabler målt som Laspeyres kædeindeks. Priser behøver ikke at være ens for alle celler i samme række.

I papiret udledes betingelserne for, at der er konsistens mellem tilgang og anvendelse i løbende priser og i foregående års priser. Disse betingelser har drillet i mange år - især ved justeringer i input-output systemet.

Papiret kan ses som færdiggørelse af udkastet til modelgruppepapir: "En input-output model med heterogene priser og kædeindeks", Jes Asger Olsen, 31. august 2009.

JAO020119

Nøgleord: Input-Output, kædeindeks

Udgangspunktet er tre matricer, **C**={c_{ij}}, **F**={f_{ij}}, **P**={p_{ij}}, som repræsenterer et input-output system med leverancer i hhv. værdier (løbende priser), kædede værdier i faste priser (Laspeyres kæder) og priser.

Hvordan formuleres et sådant system, så det er konsistent, også ved justeringer i cellernes priser og mængder?

Definitioner og identiteter

For at mængder, priser og værdier skal være et konsistent flow system med mængder målt som Laspeyres kædeindeks skal **C, F** og **P** overholde følgende definitioner og identiteter:

Prisen i hver celle (*i,j*) er defineret ved:

$$p_{ij} = \frac{c_{ij}}{f_{ij}} \tag{1}$$

Rækkesummen i værdier (løbende priser) skal stemme:

$$c_i = \sum_j c_{ij} \tag{2}$$

Søjlesummen i værdier (løbende priser) skal stemme:

$$c_j = \sum_i c_{ij} \tag{3}$$

Rækkeprisen defineres ved:

$$p_i = \frac{c_i}{f_i} \tag{4}$$

Søjleprisen defineres ved:

$$p_j = \frac{c_j}{f_j} \tag{5}$$

Rækkesummen i foregående års priser skal stemme:

$$f_i = \frac{\sum_j p_{ij,-1} f_{ij}}{p_{i,-1}} \tag{6}$$

Søjlesummen i foregående års priser skal stemme:

$$f_j = \frac{\sum_i p_{ij,-1} f_{ij}}{p_{j,-1}} \tag*{(.7)}$$

Celleligninger for mængde- og prisbestemmelse

Der opstilles ”adfærdsligninger” for cellemængde og cellepris.

Mængden i hver celle (i,j) følger mængdeudviklingen i søjlesummen, men med et fastpris-restled:

$$f_{ij} = f_{ij,-1} \frac{f_j}{f_{j,-1}} (1 + JRf_{ij}) \tag{8}$$

Dette svarer til en antagelse om konstante i-o koefficienter i faste priser, forstået på den måde, at i hver søjle er forholdet mellem cellen og søjlesummen i faste priser, f_{ij}/f_j, konstant, så længe fastpris-restleddene JRf_{ij} er 0.

Prisen i hver celle (i,j) følger udviklingen i rækkeprisen (men behøver ikke at have samme niveau som de andre priser i rækken). Også i denne prisbestemmelse tillades et restled:

$$p_{ij} = p_{ij,-1} \frac{p_i}{p_{i,-1}} (1 + JRp_{ij}) \tag{9}$$

Dette svarer til en antagelse om *konstante priskoefficienter*, forstået på den måde, at i hver række er forholdet mellem celleprisen og rækkeprisen, p_{ij}/p_i, konstant, så længe pris-restleddene er 0.

Af (1), (8) og (9) afledes bestemmelsen af cellen i løbende priser:

$$c_{ij} = p_{ij} \cdot f_{ij} = c_{ij,-1} \frac{f_j}{f_{j,-1}} \frac{p_i}{p_{i,-1}} (1 + JRp_{ij}) \cdot (1 + JRf_{ij}) \tag{10}$$

Cellen i løbende priser følger altså prisudviklingen i dens række og fastpris-udviklingen i dens søjle, men med mulighed for separat justering af både cellens pris og fastprisstørrelse.

Rækkesum-restriktionen i foregående års priser giver mængdemodellen:

Ved at indsætte celleligningerne i rækkeidentiteten for foregående års priser, (6), fås i-o mængdemodellen på kædeindeksform:

$$
\begin{aligned}
f_i &= \frac{\sum_j p_{ij,-1} f_{ij}}{p_{i,-1}} \\
&= \frac{\sum_j p_{ij,-1} f_{ij,-1} \frac{f_j}{f_{j,-1}}(1+JRf_{ij})}{p_{i,-1}} \\
&= \frac{\sum_j c_{ij,-1} \frac{f_j}{f_{j,-1}}(1+JRf_{ij})}{p_{i,-1}} \\
&= \frac{1}{p_{i,-1}} \sum_j \frac{c_{ij,-1}}{c_{j,-1}} p_{j,-1} f_j (1+JRf_{ij}) \qquad (11) \\
&\Leftrightarrow \\
p_{i,-1} f_i &= \sum_j c_{ij,-1} \frac{f_j}{f_{j,-1}}(1+JRf_{ij}) \\
&= \sum_j \frac{c_{ij,-1}}{c_{j,-1}} p_{j,-1} f_j (1+JRf_{ij})
\end{aligned}
$$

Nederste linje er *i-o mængdeligningen* for række *i* i foregående års priser.

Der er ikke de traditionelle konstante koefficienter i denne bestemmelse, men i stedet vejes cellerne i foregående års priser sammen ved hjælp af cellens andel af søjlesummen i det foregående år i løbende priser. Denne andel antages ikke konstant, men er jo prædetermineret for beregningen.

Søjlesum-restriktionen i foregående års priser giver konsistensbetingelsen for mængder:

Ved at indsætte celleligningerne i søjleidentiteten for foregående års priser, (7), fås de restriktioner, der gælder på mængdejusteringsleddene:

$$
\begin{aligned}
f_j &= \frac{\sum_i p_{ij,-1} f_{ij}}{p_{j,-1}} \\
&= \frac{\sum_i p_{ij,-1} f_{ij,-1} \dfrac{f_j}{f_{j,-1}} (1 + JRf_{ij})}{p_{j,-1}} \\
&= \frac{\sum_i c_{ij,-1} f_j (1 + JRf_{ij})}{c_{j,-1}} \\
&\Leftrightarrow \\
c_{j,-1} &= \sum_i c_{ij,-1} (1 + JRf_{ij}) \\
&\Leftrightarrow \\
0 &= \sum_i c_{ij,-1} \cdot JRf_{ij} = \sum_i \frac{c_{ij,-1}}{c_{j,-1}} \cdot JRf_{ij}
\end{aligned}
\tag{12}
$$

For at være konsistente skal *JRf*-leddene i en søjle, vægtet med foregående års udgifter eller udgiftsandele, summere til 0.

Søjlesum-restriktionen i løbende priser giver i-o prismodellen.

$$
\begin{aligned}
p_j &= \frac{c_j}{f_j} = \frac{\sum_i p_{ij} f_{ij}}{f_j} \\
&= \frac{\sum_i p_{ij,-1} \frac{p_i}{p_{i,-1}} (1+JRp_{ij}) f_{ij,-1} \frac{f_j}{f_{j,-1}} (1+JRf_{ij})}{f_j} \\
&= \frac{\sum_i c_{ij,-1} \frac{p_i}{p_{i,-1}} (1+JRf_{ij}) \cdot (1+JRp_{ij})}{f_{j,-1}} \qquad (13) \\
&\Leftrightarrow \\
\frac{p_j}{p_{j,-1}} &= \sum_i \frac{c_{ij,-1}}{c_{j,-1}} \frac{p_i}{p_{i,-1}} (1+JRf_{ij}) \cdot (1+JRp_{ij})
\end{aligned}
$$

Som er *i-o prismodellen*, men – som noget nyt – formuleret i relative ændringer og med JRp_{ij}-led. Som i tilfældet med mængdemodellen vægtes ikke med konstante i-o koefficienter, men med cellens udgiftsandel året før. Udgiftsandelen er ikke konstant, men dog prædetermineret for beregningen.

Formuleringen i relative ændringer gør, at cellepriserne p_{ij} ikke behøver at være lig med rækkeprisen p_i; det er den relative ændring i p_{ij}, der drives af den relative ændring i p_i, men pris*niveauerne* i rækkens celler kan være forskellige.

Bemærk, at hvis alle cellepriser i det foregående år er lig med hinanden, og derfor med rækkeprisen, altså $p_{ij}=p_i$ for alle i og j, klapper (13) sammen til den sædvanlige prismodel med mængdekoefficienter:

$$
p_j = \sum_i p_i \frac{f_{ij,-1}}{f_{j,-1}} (1+JRf_{ij}) \cdot (1+JRp_{ij}) \qquad (14)
$$

Men hvis blot ét JRp_{ij}-led aktiveres, vil betingelsen om identiske priser inden for enhver række være brudt for indeværende og alle efterfølgende år, og (14) må for disse år erstattes med (13) som prismodel.

Rækkesum-restriktionen i løbende priser giver konsistensbetingelser på prisjusteringer:

$$
\begin{aligned}
p_i &= \frac{c_i}{f_i} = \frac{\sum_j p_{ij} f_{ij}}{f_i} \\
&= \frac{\sum_j p_{ij,-1} \frac{p_i}{p_{i,-1}} (1+JRp_{ij}) f_{ij,-1} \frac{f_j}{f_{j,-1}} (1+JRf_{ij})}{f_i} \\
p_i &= \frac{\frac{p_i}{p_{i,-1}} \sum_j c_{ij,-1} \frac{f_j}{f_{j,-1}} (1+JRf_{ij}) \cdot (1+JRp_{ij})}{f_i} \\
&\Leftrightarrow \\
p_{i,-1} f_i &= \sum_j c_{ij,-1} \frac{f_j}{f_{j,-1}} (1+JRf_{ij}) \cdot (1+JRp_{ij}) \\
&= \sum_j \frac{c_{ij,-1}}{c_{j,-1}} p_{j,-1} f_j (1+JRf_{ij}) \cdot (1+JRp_{ij})
\end{aligned}
\tag{15}
$$

Ligning (15) angiver betingelserne for konsistens af prisjusteringerne, JRp_{ij}'erne.

Her er det passende at se på det led i brøken, der svarer til ettallet i leddet (1+JRp_{ij}). Denne del er nemlig identisk med højresiden af mængdeligningen (11). Når (11) trækkes fra på begge sider af (15) fås:

$$
\begin{aligned}
0 &= \sum_j \frac{c_{ij,-1}}{c_{j,-1}} p_{j,-1} f_j \cdot (1+JRf_{ij}) \cdot JRp_{ij} \\
&= \frac{p_i}{p_{i,-1}} \sum_j \frac{c_{ij,-1}}{c_{j,-1}} p_{j,-1} f_j \cdot (1+JRf_{ij}) \cdot JRp_{ij} \\
&= \sum_j \frac{c_{ij}}{(1+JRp_{ij})} \cdot JRp_{ij}
\end{aligned}
\tag{16}
$$

Sidste linie udnytter elementarligningen for celle (*i,j*) i løbende priser, (10).

Dette er betingelsen for konsistens af pris-justeringsleddene, givet at mængde-justeringsleddene er konsistente: Pris-justeringsleddene i en søjle, vægtet sammen med de respektive celleværdier i løbende priser *eksklusive* prisjusteringer, skal summere til 0.

Hvad skal vi gøre?

I bilaget er flere forskellige formuleringsvarianter af systemet skrevet op. Det kan man mene meget om. Men i den nuværende situation, hvor vi allerede *har* indbygget input-output ligninger med pseudo-fastpriskoefficienter i ADAM, er det indlysende nemmest at fortsætte arbejdet ad denne vej. Den er vist i bilaget med ligninger af version 4.

Den giver de simpleste ligninger, undtagen for konsistenssikringen af prisjusteringerne.

Pseudo-mængde-koefficienter defineres som

$$a_{ij} = \frac{c_{ij}}{p_i \cdot f_j} \tag{17}$$

Fra bilaget hentes så

Celleligninger

$$a_{ij} = a_{ij,-1}(1 + JRp_{ij}) \cdot (1 + JRf_{ij}) \tag{10v3a}$$

Mængder

$$\begin{aligned} f_i &= \sum_j a_{ij,-1} f_j (1 + JRf_{ij}) \\ &= \sum_j a_{ij} \frac{f_j}{(1 + JRp_{ij})} \end{aligned} \tag{11v3a}$$

Mængdejustering

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_i c_{ij,-1} \cdot JRf_{ij} = \sum_i a_{ij,-1} p_{i,-1} f_{j,-1} \cdot JRf_{ij} \\ &= \sum_i a_{ij,-1} p_{i,-1} \cdot JRf_{ij} \end{aligned} \tag{12v3a}$$

Priser

$$\begin{aligned} p_j &= \sum_i a_{ij,-1} p_i (1 + JRf_{ij}) \cdot (1 + JRp_{ij}) \\ &= \sum_i a_{ij} p_i \end{aligned} \tag{13v3a}$$

Prisjustering

$$0 = \sum_j \frac{a_{ij} p_i f_j}{(1 + JRp_{ij})} \cdot JRp_{ij} = \sum_j \frac{a_{ij} f_j}{(1 + JRp_{ij})} \cdot JRp_{ij} \tag{16v3a}$$

Budskabet her er, at i forhold til den nuværende modelformulering må vi have et ekstra justeringsled hægtet på alle ligninger for i-o koefficienter i ADAM, nemlig et prisjusteringsjed JRp_{ij}, fordi pris- og mængde justeringer ikke indgår ens i ligningerne. De har også forskelllige konsistensbetingelser for mængde- og prisjusteringer. Håbet fra ældre modelversioner om, at man kunne slå dem sammen i ét justeringsled pr. celle, er bristet.

I prisligningen (13) kan man vælge, om man vil have laggede koefficienter og Jled eller løbende koefficienter og ingen Jled. I mængdeligningen (11) skal man derimod vælge, om man vil have laggede koefficienter og tage mængde-Jleddene med eller have årets koefficienter og dividere med pris-Jleddene.

Hvis ikke alle prisjusteringer er 0, laver den nuværende mængdemodel altså fejl, når den benytter årets koefficienter uden at dividere de enkelte koefficienter med deres prisjusteringer.

Den nuværende prismodel kan bevares uden ændringer, hvis celle-ligningerne formuleres med et ekstra pris-Jled, som i (10v4a).

Sikring af konsistens i Jleddene kan enten finde sted ved at residualdefinere et Jled i rækken (mængder)/søjlen(priser) eller ved at proportionaljustere alle mængde-Jled i hver række og alle pris-Jled i hver søjle, så deres sum stemmer med hhv. (12) og (16).

Bemærk, at JRf_{ij} 'erne og JRp_{ij}'erne fortolkes som rene hhv. mængde- og prisjusteringer, selv om i-o koefficienterne er "pseudo-fastpris-koefficienter".

Formulering af Jled, og særlige forhold omkring importsubstitution, udbudsdrevne erhverv osv. i ADAMs input-output system, vil blive behandlet i selvstændige papirer senere. Her er alene skabelonen præsenteret.

Data

Fastpris justeringsled kan beregnes ud fra cellerne i løbende og foregående års priser, jf. (8):

$$f_{ij} = f_{ij,-1}\frac{f_j}{f_{j,-1}}(1+JRf_{ij})$$

$$\Leftrightarrow$$

$$JRf_{ij} = \frac{p_{ij,-1}f_{ij}}{c_{ij,-1}}\frac{f_{j,-1}}{f_j} - 1$$

Prisjusteringsled beregnes tilsvarende ud fra (9)

$$p_{ij} = p_{ij,-1}\frac{p_i}{p_{i,-1}}(1+JRp_{ij})$$

$$\Leftrightarrow$$

$$JRp_{ij} = \frac{c_{ij}}{p_{ij,-1}f_{ij}}\frac{p_{i,-1}}{p_i} - 1$$

Med serienavne fra OBK fås fx for cellen *Xa_Xnf* disse Gekko-ordrer:

Series *JRfXa_Xnf* = (*d_Xa_Xnf/Xa_Xnf[-1]*)**fXnf[-1]/fXnf* - 1 ;
Series *JRpXa_Xnf* = (*Xa_Xnf/d_Xa_Xnf*)**pxnf[-1]/pxnf* - 1 ;

Bilag: Forskellige måder at skrive ligningssystemet op på.

Input-output systemet består altså af et sæt mængdeligninger (1 pr. række) , et sæt prisligninger (1 pr. søjle), et sæt konsistensbetingelser på mængdejustering (1 pr. søjle) og et sæt konsistensbetingelser på prisjusteringer (1 pr. række).

Spørgsmålet er nu, hvordan systemet skrives op på den mest læselige og håndterbare måde, herunder sådan at eventuelle dekomponeringer af effekter kommer til at se letfortolkelige ud.

Et vigtigt spørgsmål er, hvilke celle-variable, der skal benyttes (der er mange celler), og om der skal defineres hjælpevariable, som fx input-output koefficenter.

Mulighederne er:

- Udgifter som cellevariable, ingen koefficienter (måske med alternativet cellevariable for enhedsomkostninger, $uc_{ij=}\ c_{ij}/f_j$),
- Udgiftsandele som cellevariable, c_{ij}/c_j, ingen koefficienter,
- Mængdekoefficienter, f_{ij}/f_j, (måske suppleret med priskoefficienter),
- Pseudo-koeffienter som cellevariable (som i dag), $a4_{ij=}\ c_{ij}/(\ p_i f_j\ )$.

Det understreges, at det er forskellige formuleringsvarianter af samme system, der vises i dette afsnit. Der er ikke forskel på løsningerne, valget af den konkrete formulering handler kun om æstetik og praktisk anvendelighed.

<u>Mulighed 1: Celler i værdier, ingen hjælpevariable</u>

I denne formulering arbejdes kun med i-o celler i løbende priser som celle-variable, som dem i CELBK. Der er ingen konstante koefficienter: Celle-udgifterne udvikler sig både med søjlens mængdeudvikling og med rækkens prisudvikling. En fordel er, at man ikke behøver at tænke på, om en koefficient nu er divideret med produktionen, energikøbet, materialekøbet etc. Alle vægte er prædeterminerede eller eksogene, så

Celleligninger

$$c_{ij} = c_{ij,-1}\frac{f_j}{f_{j,-1}}\frac{p_i}{p_{i,-1}}(1+JRp_{ij})\cdot(1+JRf_{ij}) \qquad (10v1)$$

Mængder

$$\begin{aligned} f_i &= \frac{1}{p_{i,-1}}\sum_j \frac{c_{ij,-1}}{f_{j,-1}} f_j (1+JRf_{ij}) \\ &= \frac{1}{p_i}\sum_j \frac{c_{ij}}{(1+JRp_{ij})} \end{aligned} \qquad (11v1)$$

Mængdejustering

$$0 = \sum_i c_{ij,-1}\cdot JRf_{ij} = \sum_i \frac{c_{ij,-1}}{f_{j,-1}}\cdot JRf_{ij} \qquad (12v1)$$

Priser

$$\begin{aligned} p_j &= \sum_i \frac{c_{ij,-1}}{f_{j,-1}} \frac{p_i}{p_{i,-1}} (1+JRf_{ij}) \cdot (1+JRp_{ij}) \\ &= \sum_i \frac{c_{ij}}{f_j} \end{aligned} \tag{13v1}$$

Prisjustering

$$0 = \sum_j \frac{c_{ij}}{(1+JRp_{ij})} \cdot JRp_{ij} = \sum_j \frac{c_{ij}}{f_j} \frac{f_j}{(1+JRp_{ij})} \cdot JRp_{ij} \tag{16v1}$$

Igen kan man vælge, om man vil skrive mængdeligningerrne som funktion af laggede værdier for cellerne med mængde-Jled eller løbende værdier for cellerne divideret med et pris-Jled.

Prisligningerne bliver enten meget lange, hvis de opskrives med laggede celle-værdier, eller helt korte, hvis de opskrives med løbende celle-værdier.

Formulering (v1) er en meget simpel måde at opskrive systemet på, og den generaliserer måske endda lettere til mere generelle udgiftsfunktioner.

Formulering (v1) må siges at friste til at benytte cellernes bidrag til enhedsomkostningerne i hver søjle, $uc_{ij}=c_{ij}/f_j$, som cellevariable i stedet for totaludgifterne, c_{ij}. Disse bidrag vil heller ikke ikke være konstante, men typisk udvikle sig som rækkeprisen. Men de vil formentlig give gode DEKOMP udskrifter, og ligningerne bliver generelt meget lette at forstå.

Mulighed 1a: Celler er enhedsomkostninger

Celleligninger

$$uc_{ij} = uc_{ij,-1} \frac{p_i}{p_{i,-1}} (1+JRp_{ij}) \cdot (1+JRf_{ij}) \tag{10v1a}$$

Mængder

$$\begin{aligned} f_i &= \frac{1}{p_{i,-1}} \sum_j uc_{ij,-1} f_j (1+JRf_{ij}) \\ &= \frac{1}{p_i} \sum_j \frac{uc_{ij} \cdot f_j}{(1+JRp_{ij})} \end{aligned} \tag{11v1a}$$

Mængdejustering

$$0 = \sum_i uc_{ij,-1} \cdot JRf_{ij} \tag{12v1a}$$

Priser

$$p_j = \sum_i uc_{ij} \tag{13v1a}$$

Prisjustering

$$0 = \sum_j uc_{ij} \frac{f_j}{(1+JRp_{ij})} \cdot JRp_{ij} \qquad (16v1a)$$

En minimalistisk og god opskrivning af systemet, men lidt uvant.

Mulighed 2: Celler er udgiftsandele ("IO-koefficienter i løbende priser")

Hvis udgiftsandelene c_{ij}/c_j benyttes som cellevariable, fås varianten v2:

Celleligninger, udgiftsandele

$$\frac{c_{ij}}{c_j} = \frac{c_{ij,-1}}{c_{j,-1}} \frac{p_{j,-1}}{p_j} \frac{p_i}{p_{i,-1}} (1+JRp_{ij}) \cdot (1+JRf_{ij}) \qquad (10v2)$$

Mængder

$$f_i = \frac{1}{p_{i,-1}} \sum_j \frac{c_{ij,-1}}{c_{j,-1}} p_{j,-1} f_j (1+JRf_{ij}) \qquad (11v2)$$

Mængdejustering

$$0 = \sum_i c_{ij,-1} \cdot JRf_{ij} = \sum_i \frac{c_{ij,-1}}{c_{j,-1}} \cdot JRf_{ij} \qquad (12v2)$$

Priser

$$\frac{p_j}{p_{j,-1}} = \sum_i \frac{c_{ij,-1}}{c_{j,-1}} \frac{p_i}{p_{i,-1}} (1+JRf_{ij}) \cdot (1+JRp_{ij}) \qquad (13v2)$$

Prisjustering

$$0 = \sum_j \frac{c_{ij}}{(1+JRp_{ij})} \cdot JRp_{ij} = \sum_j \frac{c_{ij}}{c_j} \frac{c_j}{(1+JRp_{ij})} \cdot JRp_{ij} \qquad (16v2)$$

En udmærket formulering, men dog med lidt flere tegn end mulighed 1a. Udgiftsandelene (koefficienterne) vil ikke være konstante, men dog nærme sig konstans, efterhånden som alle priser ender med at udvikle sig ens i lange kørsler.

Måske er denne formulering den, der generaliserer sig bedst til mere generelle udgiftsfunktioner, fordi mange udgiftsfunktioner fx translog, CES, CD osv. benytter udgiftsandelene som omdrejningspunkt.

Mulighed 3: Mængdekoefficienter

…kan defineres som $a3_{ij}=f_{ij}/f_j$. Men de er ikke rigtig gangbare, selv om det jo er dem, der som udgangspunkt antages konstante, se (8). Fx bliver mængdeligningen

$$f_i = \frac{1}{p_{i,-1}} \sum_j a3_{ij,-1}\, p_{ij,-1} f_j (1 + JRf_{ij}) \qquad (11v3)$$

Det er ikke altså nok med mængdekoefficienter for hver celle, der skal også defineres celle-priskoefficienter for hver celle, som p_{ij}/p_i, for at det hele kører rundt. Det er lidt rigeligt med to fulde matricer af koefficienter, plus to fulde matricer af Jled – og ikke nødvendigt.

Mængdekoefficienter har også det problem, at hvis en mængdecelle bare én gang i fortiden har været 0, vil den altid være 0, uanset hvad. Og det sker jo faktisk i tallene for enkelte cellers vedkommende. Tænk bare på energiudvinding, som ikke fandtes i 1970'erne.

Der gås ikke videre med mængdekoefficienter.

Mulighed 4. Pseudo-fastpris-koefficienter, som ADAM i dag:

De pseudo-fastpris koefficienter, som vi bruger i dag, $=c_{ij}/(p_i f_j)$, giver meget simple ligninger for celler, mængder og priser, men konsistensbetingelserne for Jleddene bliver mere krøllede (uden at være meget slemme):

Celleligninger

$$\frac{c_{ij}}{f_j p_i} = \frac{c_{ij,-1}}{f_{j,-1} p_{i,-1}} (1 + JRp_{ij}) \cdot (1 + JRf_{ij}) \qquad (10v4)$$

Mængder

$$\begin{aligned} f_i &= \sum_j \frac{c_{ij,-1}}{f_{j,-1} p_{i,-1}} f_j (1 + JRf_{ij}) \\ &= \sum_j \frac{c_{ij}}{f_j p_i} \frac{f_j}{(1 + JRp_{ij})} \end{aligned} \qquad (11v4)$$

Mængdejustering

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_i c_{ij,-1} \cdot JRf_{ij} \\ &= \sum_i \frac{c_{ij,-1}}{f_{j,-1} p_{i,-1}} p_{i,-1} f_{j,-1} \cdot JRf_{ij} \end{aligned} \qquad (12v4)$$

Priser

$$p_j = \sum_i \frac{c_{ij,-1}}{f_{j,-1} p_{i,-1}} p_i (1 + JRf_{ij}) \cdot (1 + JRp_{ij}) \qquad (13v4)$$

Prisjustering

$$0 = \sum_j \frac{c_{ij}}{f_j p_i} \frac{f_j}{(1+JRp_{ij})} \cdot JRp_{ij} \qquad (16v4)$$

Skrevet helt ud med koefficienter som celle-variable, defineret ved $a4_{ij}=c_{ij}/(p_{ij}f_{ij})$:

Celleligninger

$$a4_{ij} = a4_{ij,-1}(1+JRp_{ij}) \cdot (1+JRf_{ij}) \qquad (10v4a)$$

Mængder

$$\begin{aligned} f_i &= \sum_j a4_{ij,-1} f_j (1+JRf_{ij}) \\ &= \sum_j a4_{ij} \frac{f_j}{(1+JRp_{ij})} \end{aligned} \qquad (11v4a)$$

Mængdejustering

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_i c_{ij,-1} \cdot JRf_{ij} = \sum_i a4_{ij,-1}\, p_{i,-1} f_{j,-1} \cdot JRf_{ij} \\ &= \sum_i a4_{ij,-1}\, p_{i,-1} \cdot JRf_{ij} \end{aligned} \qquad (12v4a)$$

Priser

$$\begin{aligned} p_j &= \sum_i \frac{c_{ij,-1}}{f_{j,-1} p_{i,-1}} p_i (1+JRf_{ij}) \cdot (1+JRp_{ij}) \\ &= \sum_i a4_{ij}\, p_i \end{aligned} \qquad (13v4a)$$

Prisjustering

$$0 = \sum_j \frac{p_i a4_{ij} f_j}{(1+JRp_{ij})} \cdot JRp_{ij} = \sum_j \frac{a4_{ij} f_j}{(1+JRp_{ij})} \cdot JRp_{ij} \qquad (16v4a)$$

Denne formuleringsvariant er den eneste, hvor cellevariablene bliver koefficienter, der som udgangspunkt er konstante (når der ses bort fra den fravalgte variant med både konstante mængde- og pris-koefficienter).

Den er også efter omstændighederne let at overskue.